AM2 **docente: Lezcano** **2024**

SEGUNDO PARCIAL
Simulacro

Ejercicios teóricos

T1. Sea $\vec{f}\colon A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, A abierto, $\vec{f} = (P, Q) \in C^1$. Demuestre que si $\vec{f}$ es conservativo, entonces $Q'_x = P'_y$.

T2. Enuncie el teorema de Stokes. Determine la veracidad de la siguiente afirmación:

"Si $\vec{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial C^1 tal que $\operatorname{rot}(\vec{f}\,) = (2, -2, 3)$, entonces la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de la curva C borde de la superficie $x + y + z = 4$, en el primer octante, orientada en sentido $(4,0,0) \to (0,0,4) \to (0,4,0) \to (4,0,0)$ es 24 ." **JUSTIFICAR**

Ejercicios prácticos

P1. Calcule la masa de la superficie Σ definida por $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, $1 \le y \le 3$, si su densidad en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al **plano** xz .

P2. Sean $\vec{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{f} = (P, Q)$, un campo C^1 y conservativo; $\vec{g}(x, y) = (xy,\ \operatorname{sen}(y^4))$ y $\vec{h} = \vec{f} + \vec{g}$. Calcule la circulación de $\vec{h}$ a lo largo de la curva $C : x^2 + y^2 = 6x$. Indique claramente la orientación elegida para el cálculo.

P3. Sea $\vec{f}(x, y, z) = (x^2 + z^3,\ x^4 - 2xy,\ z)$. Calcule el flujo de $\vec{f}$ a través de la superficie S definida $x^2 + y^2 + z^2 = 5$, $z \ge 1$. Indique en un gráfico cómo elige orientar a la superficie.

P4. *a*) Halle la solución de $y'' + 4y' = -10e^x$, que verifica $y(0) = 3$, $y'(0) = -2$.

b) Dado el campo vectorial $\vec{f}(x, y) = (x,\ 2y)$, halle la linea de campo de $\vec{f}$ que pasa por $(3, -4)$.

AM2	2° parcial	1/3
	Lezcano	2024

T1 Sea $\bar{f}: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, A abierto, $\bar{f} = (P, Q) \in C^1$. Demostrar que si $\bar{f}$ es conservativo entonces $Q'_x = P'_y$

Si $\bar{f}$ es conservativo $\Rightarrow$ • $\bar{f} \in C^1$

• $\text{dom}(\bar{f}) = A$, abierto

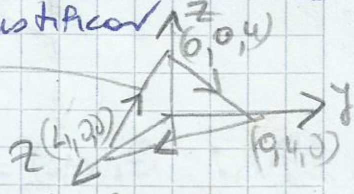
• ~~tiene~~ matriz jacobiana simétrica

$$\bar{f} = (P, Q) \longrightarrow D\bar{f} = \begin{pmatrix} P'_x & P'_y \\ Q'_x & Q'_y \end{pmatrix}$$ es simétrica si $Q'_x = P'_y$

T2 Enunciar el teorema de Stokes. Determinar la veracidad de la seg. afirmación:

"Si $\bar{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial C^1 tal que $\text{rot}(\bar{F}) = (2, -2, 3)$, entonces la circulación de $\bar{F}$ a lo largo de la curva C borde de la sup. $\boxed{x+y+z=4}$, en el primer octante, orientada en sentido $(4,0,0) \to (0,0,4) \to (0,4,0) \to (4,0,0)$ es 24" Justificar

$N = (-1, -1, -1)$



Si: Hip: $\begin{cases} \bar{F} \in C^1 \\ S \text{ superficie orientable} \\ C \text{ curva cerrada y suave a trozos, frontera de } S \end{cases}$

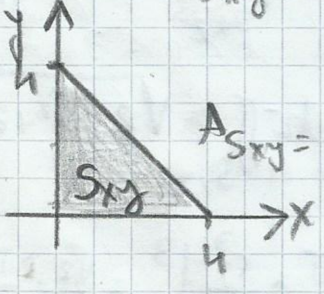
$$\Rightarrow \boxed{\oint_{C^+} \bar{F}\, d\bar{l} = \iint_S \text{rot}(\bar{F})\, d\bar{s}} = \iint_S \text{rot}(\bar{F})\, \check{N}\, ds = \iint_{S_{xy}} \text{rot}(F)\, n\, dx\, dy$$

✓ se cumplen las hip. T. Stokes.

$$\oint_{C^+} \bar{F}\, d\bar{l} = \iint_{S_{xy}} (2, -2, 3)(-1, -1, -1)\, dx\, dy = \iint_{S_{xy}} -2+2-3\, dx\, dy =$$

$$= \iint_{S_{xy}} -3\, dx\, dy = -3 \underbrace{\boxed{\iint_{S_{xy}} dx\, dy}}_{8} = -24$$

área de S_{xy}



$A_{S_{xy}} = \frac{4 \times 4}{2} = 8$

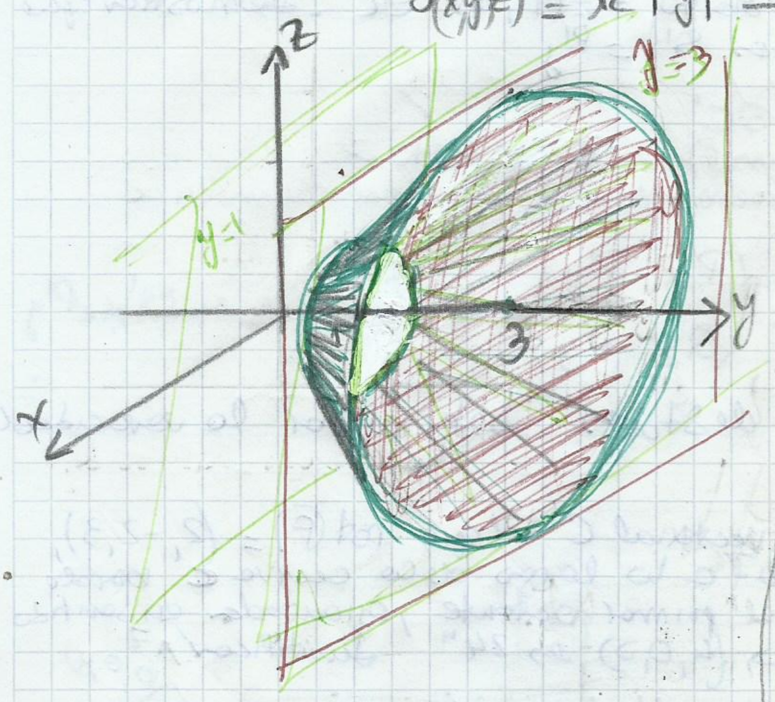
$$\boxed{\oint_{C^+} \bar{F}\, d\bar{l} = -24} \neq 24$$

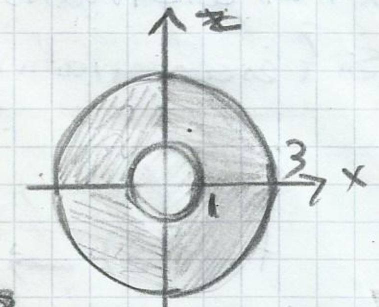
F

Superficie

(P1) Calcular la $\boxed{\text{masa de la sup } \Sigma}$ definida por $y=\sqrt{x^2+z^2}$
$1 \le y \le 3$, si su densidad, en cada punto, es proporcional
a la dist. del punto al plano xz

$$\delta(xyz) = k\,|y| \xrightarrow{1\le y\le 3} \boxed{\delta(xyz) = k\,y}$$





$$\boxed{\begin{array}{c} 0 \le t \le 2\pi \\ 1 \le r \le 3 \end{array}}$$

$y = \sqrt{x^2+z^2}$ $\begin{cases} x = r\cos(t) \\ z = r\,sen(t) \end{cases}$

$y = \sqrt{r^2} \to y = r$ $y = r$

Para el C.V.

$$N: \quad G(xyz) = y^2 - x^2 - z^2$$

$$\nabla G = (-2x, +2y, -2z) \rightsquigarrow N = \left(\frac{-2x}{2y}, \frac{2y}{2y} ; \frac{-2z}{2y}\right)$$

$$N = \left(-\frac{x}{y}, 1, -\frac{z}{y}\right) \to \|N\| = \sqrt{\frac{x^2}{y^2} + 1 + \frac{z^2}{y^2}}$$

$$Masa_S = \iint_S \delta(xyz)\, dS = \iint_{S_{xz}} k\, y\, \|N\|\, dx\,dz = k\iint_{S_{xz}} y \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{y^2}}\, dx\,dz =$$

$$= k\iint_{S_{xz}} \cancel{y} \frac{\sqrt{x^2+z^2+\sqrt{x^2+z^2}^{\,2}}}{\cancel{y}}\, dx\,dz = k\iint_{S_{xz}} \sqrt{2(x^2+z^2)}\, dx\,dz =$$

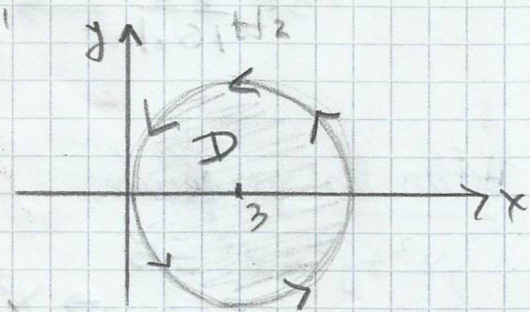
$$\overset{C.V.}{=} \sqrt{2}\,k \int_0^{2\pi}\int_1^3 \overset{Jac}{r} \cdot \overset{\sqrt{x^2+z^2}}{r}\, dr\,dt = \sqrt{2}\,k \cdot 2\pi \cdot \frac{r^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{\sqrt{2} \cdot 2\pi}{3}\pi\,(\overset{26}{27-1})\,k$$

$$\boxed{Masa_S = \frac{52\sqrt{2}}{3}\pi\, k}$$

AM2	2º parcial	2/3
	Lezcano	2024

(P2) Sean $\bar{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\bar{f} = (P, Q)$, un campo C^1 y conservativo; $\bar{g}(x,y) = (xy, \operatorname{sen}(y^4))$ y $\vec{h} = \bar{f} + \bar{g}$. Calcular la circulación de $\vec{h}$ a lo largo de $\boxed{C: x^2+y^2 = 6x}$. Indicar la orientación elegida.

- $\bar{h}(x,y) = (P, Q) + (xy, \operatorname{sen}(y^4)) = (\underbrace{P(x,y) + xy}_{H_1}, \underbrace{Q(x,y) + \operatorname{sen}(y^4)}_{H_2})$
- $\bar{f}$ es conservativo $\Rightarrow Q'_x = P'_y$
- C es una curva cerrada y suave
- $\bar{h} \in C^1$ $\quad \bar{h} = (H_1, H_2)$
- D es una región contenida por C



$\Rightarrow$ T. Green

$$\oint_{C^+} \bar{h}\, d\bar{l} = \iint_D H'_{2x} - H'_{1y}\, dx\, dy =$$

$$= \iint_D Q'_x - P'_y - x\, dx\, dy =$$

$$= - \iint_D x\, dx\, dy =$$

- $x^2 - 6x + 9 - 9 + y^2 = 0$
- $(x-3)^2 + y^2 = 9$
- $\begin{cases} x = r\cos(t) + 3 \\ y = r\,\operatorname{sen} t \end{cases}$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$, $\quad 0 \le r \le 3$

$$\overset{C.V}{=} - \int_0^{2\pi}\int_0^3 \overset{Jac}{r} \cdot \underbrace{(r\cos(t) + 3)}_{x}\, dr\, dt =$$

$$= - \Big[\underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^3 r^2 \cos(t)\, dr\, dt}_{0} + \int_0^{2\pi}\int_0^3 3r\, dr\, dt \Big] = -3 \underbrace{\overset{\text{Area de } D}{\iint_D r\, dr\, dt}}_{\pi \cdot 3^2}$$

$$\boxed{\oint_{C^+} \bar{h}\, d\bar{l} = -27\pi}$$

(P3) Sea $\bar{f}(x,y,z) = (x^2+z^3, x^4-2xy, z)$.

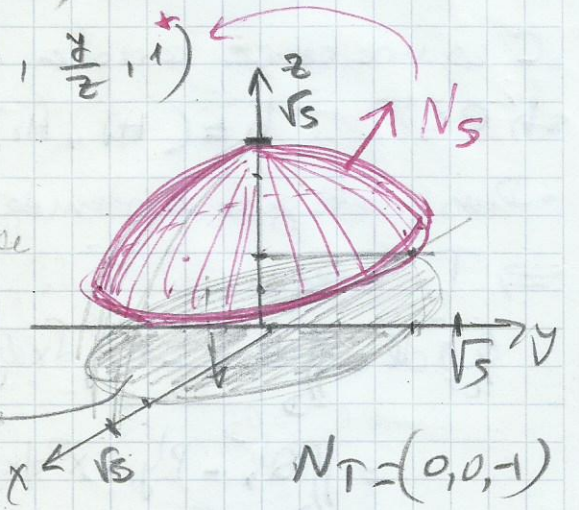
Calcular el flujo de $\bar{f}$ a través de la sup. S definida por $x^2+y^2+z^2=5$, $z\geq 1$. Indicar, en un gráfico, la orientación elegida.

$$S: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=5 \\ z\geq 1 \end{cases} \rightarrow G(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-5$$

$$N_S \parallel \nabla G \rightarrow \nabla G = (2x, 2y, 2z)$$

$$N_S = \frac{\nabla G}{|G'z|} \longrightarrow N_S = \left(\frac{2x}{2z}, \frac{2y}{2z}, \frac{2z}{2z}\right)$$

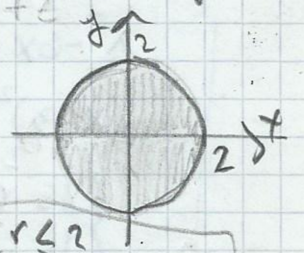
$$N_S = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right)$$



Hallo la proyección

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=5 \\ z=1 \end{cases} \rightarrow x^2+y^2=4$$

$$\begin{cases} x=r\cos(t) \\ y=r\,\mathrm{sen}(t) \\ z=z \end{cases}$$



$$\boxed{\begin{matrix} 0\leq r\leq 2 \\ 0\leq t\leq 2\pi \\ 1\leq z\leq \sqrt{5-r^2} \end{matrix}}$$

$N_T = (0,0,-1)$

Agrego una tapa en $z=1$

$$\boxed{z = \sqrt{5-x^2-y^2}}$$

Resolverlo x definición queda medio feo

x Gauss $\rightarrow \oiint_{S\cup T} \bar{f}\,d\bar{s} = \underbrace{\iiint_W \mathrm{div}(f)\,dvol}_{\frac{2\sqrt{5}-20\pi}{3}} = \iint_S \bar{f}\,d\bar{s} + \underbrace{\iint_T \bar{f}\,d\bar{s}}_{-\pi 4}$

- $\mathrm{div} = 2x - 2x + 1 = 1$

$$\oiint_{S\cup T} \bar{f}\,d\bar{s} = \iiint_W dvol \overset{CV}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_1^{\sqrt{5-r^2}} \underset{Jac}{r}\, dz\,dr\,dt = \int_0^{2\pi}\int_0^2 r\left(\sqrt{5-r^2}-1\right)dr\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 r\sqrt{5-r^2}\,dr\,dt - \underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^2 r\,dr\,dt}_{\text{Area} = 2^2\pi} = 2\pi\cdot\frac{-1}{3}\sqrt{5-r^2}\Big|_0^2 - 4\pi =$$

$$= -\frac{2\pi}{3}\left(1-\sqrt{5}\right) - 4\pi = \frac{2\sqrt{5}-8\pi}{3} - 4\pi = \boxed{\frac{2\sqrt{5}-20\pi}{3} = \oiint_{S\cup T}\bar{f}\,d\bar{s}}$$

$$\iint_T \bar{f}\,d\bar{s} = \iint_{T_{xy}} (x^2+z^3, x^4-2xy, z)\cdot(0,0,-1)\,dx\,dy = -\iint_{T_{xy}} \overset{z=1}{z}\,dx\,dy = -\underbrace{\iint_{T_{xy}} dx\,dy}_{\text{Area}} = -\pi 4$$

$$\boxed{\iint_S \bar{f}\,d\bar{s} = \frac{2\sqrt{5}-8\pi}{3}}$$

AM 2	2° parcial	3/3
	Lezcano	2024

P4) a) Hallar la solución de $y'' + 4y' = -10e^x$ que verifica $y(0) = 3$ $y'(0) = -2$

SH) $y'' + 4y' = 0$

$r^2 + 4r = 0 = r(r+4) \begin{cases} r = 0 \\ r = -4 \end{cases}$ $\boxed{y_H = A + Be^{-4x}}$

$A, B, C \in \mathbb{R}$

SP) $y_P = C e^x \rightarrow y'_P = Ce^x = y''_P$

$y'' + 4y' = -10e^x$

$C\cancel{e^x} + 4C\cancel{e^x} = -10\cancel{e^x}$

$5C = -10 \rightarrow C = -2$ $\boxed{y_P = -2e^x}$

$y_G = A + Be^{-4x} - 2e^x$

$y' = -4Be^{-4x} - 2e^x$

$y(0) = 3 = A + B - 2 \longrightarrow A + B = 5$

$y'(0) = -2 = -4B - 2 \longrightarrow B = 0 \rightarrow A = 5$

$$\boxed{y(x) = 5 - 2e^x}$$

b) Dado el campo vectorial $\bar{f}(x,y) = (x, 2y)$ hallar la línea de campo de $\bar{f}$ que pase por $(3,-4)$

$C: l.c. \rightarrow C: \bar{\gamma}(t) \rightarrow \bar{F}(\bar{\gamma}(t)) = \bar{\gamma}'(t) \longrightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y}$

$\frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{dx}$

$\ln(y) = 2\ln(x) + c = \ln(x^2) + c$

$\rightarrow \boxed{y = kx^2}$

pasa por $(3,-4) \Rightarrow x = 3$, $y = -4$

$-4 = k3^2 \longrightarrow k = -\frac{4}{9}$

$$\boxed{y = -\frac{4}{9}x^2}$$